Solution §1.10 #2

Note Title 2010-02-09

#2 $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sol $\lambda = 1, -1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = P e^{Dt} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^t & e^t \\ 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2e^t & e^t - e^{-t} \\ 0 & 2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t e^{-As} f(s)\,ds = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-s} & \frac{e^{-s} - e^{s}}{2} \\ 0 & e^{s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} s \cdot e^{-s} + \frac{e^{-s} - e^{s}}{2} \\ e^{s} \end{pmatrix} ds$$

$u = s \quad v' = e^{-s}$

$u' = 1 \quad v = -e^{-s}$

$$= \begin{pmatrix} -se^{-s}\Big|_0^t + \int_0^t e^{-s} ds - \frac{e^{-s} + e^{s}}{2}\Big|_0^t \\ e^t - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -te^{-t} - e^{-t} + 1 - \frac{e^{-t}+e^{t}}{2} + 1 \\ e^{t} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -te^{-t} - \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t} + 2 \\ e^{t} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad x(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-As} f(s)\,ds$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t} & \frac{e^{t}-e^{-t}}{2} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -te^{-t} - \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t} + 2 \\ e^{t} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cancel{e^{2t}} + 2e^{t} + \frac{1}{2}\cancel{e^{2t}} - \frac{e^{t}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^{-t}}{2} \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -t + \frac{5}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} - 2 \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix} \quad //$$

$\boxed{\text{Check}}$

$$LHS = x'(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{5}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$RHS = Ax + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t + \frac{5}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} - 2 \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -t + \frac{5}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} - 2 + 1 - e^{-t} + t \\ -1 + e^{-t} + 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark \quad //$$